

## Circuitos RLC alimentados com onda quadrada

### 4.1 Material

- Gerador de funções;
- osciloscópio;
- multímetro;
- capacitor de 10 nF;
- resistores de 100  $\Omega$ ;
- indutor de 10 a 50 mH;
- potenciômetro.

### 4.2 Introdução

No capítulo anterior estudamos o comportamento da voltagem em circuitos RC e RL quando alimentados por uma voltagem constante que muda subitamente de valor. Vimos que o capacitor e o indutor possuem comportamentos opostos quando um transiente positivo de tensão é aplicado. A voltagem no capacitor (inicialmente descarregado) é zero e vai aumentando à medida que o tempo passa, enquanto que a voltagem no indutor começa com o valor máximo e vai caindo à medida que o tempo passa. A taxa com que a voltagem (ou a corrente) varia em cada circuito depende de sua constante de tempo característica.

O que vamos estudar agora é o que se passa quando colocamos um resistor, um capacitor e um indutor em série em um circuito, como o mostrado na figura 4.1 a seguir.

No instante que viramos a chave para a posição "A", uma voltagem  $V_B$  é aplicada ao circuito e quando a chave vai para a posição "B", a fonte é desconectada. Neste caso, as

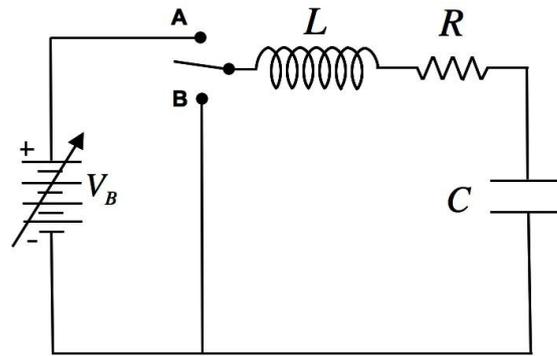


Figura 4.1: Circuito RLC.

cargas se movem usando a energia que foi armazenada no indutor e no capacitor, quando a fonte estava ligada.

Quando a chave é colocada na posição "A", pela lei das malhas temos que:

$$V_B = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}. \quad (4.1)$$

Substituindo  $i = dq/dt$  na equação 4.1, encontramos:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_B. \quad (4.2)$$

Como se trata de uma equação diferencial não-homogênea, sua solução geral será a soma da solução geral  $q_h(t)$  da equação homogênea associada, com uma solução particular  $q_p(t)$  da equação completa:

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t). \quad (4.3)$$

A solução particular da equação 4.2 é  $q_p = aV_B$ , que ao ser substituída na equação 4.2 leva a  $a = C$ , ou seja:

$$q_p(t) = CV_B. \quad (4.4)$$

A equação homogênea associada à equação diferencial 4.2 é:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (4.5)$$

Para encontrarmos a solução desta equação diferencial, observemos que ela envolve funções cujas derivadas primeira e segunda são proporcionais a elas mesmas. As funções que satisfazem a essas condições são a função exponencial e as funções seno e cosseno. Como podemos representar as funções seno e cosseno por exponenciais complexas, vamos supor uma solução geral do tipo:

$$q_h(t) = b e^{rt}, \quad (4.6)$$

onde  $b$  e  $r$  são constantes, de forma que:

$$\frac{dq_h}{dt} = r q_h(t) \quad (4.7)$$

e

$$\frac{d^2 q_h}{dt^2} = r^2 q_h(t). \quad (4.8)$$

Assim, para que a equação diferencial descrita na equação 4.5 seja satisfeita devemos ter

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0, \quad (4.9)$$

onde definimos os parâmetros

$$\alpha \equiv \frac{R}{2L} \quad (4.10)$$

e

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.11)$$

O parâmetro  $\alpha$  é chamado de constante de amortecimento (seu significado se tornará óbvio nas páginas seguintes), enquanto  $\omega_0$  é chamado de frequência natural (ou frequência de ressonância) do circuito RLC (sua relevância será compreendida quando estudarmos circuitos RLC alimentados com tensões senoidais).

Resolvendo a equação 4.9, encontramos para  $r$  os seguintes valores:

$$r_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.12)$$

e

$$r_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (4.13)$$

Temos, portanto, três regimes diferentes de operação, dependendo dos valores de  $\alpha$  e  $\omega_0$ :

- regime **super-crítico**: neste caso  $\alpha > \omega_0$  e a solução corresponde à soma de duas exponenciais que decaem com o tempo;
- regime **crítico**: neste caso  $\alpha = \omega_0$ ,  $r_1 = r_2$  e a solução corresponde à soma de uma exponencial que decai com o tempo com uma função linear em  $t$ ;
- regime **sub-crítico**: neste caso  $\alpha < \omega_0$ , as raízes  $r_1$  e  $r_2$  são complexas, e a solução corresponde a oscilações amortecidas.

Para o caso sub-crítico podemos escrever a solução geral da equação 4.2 como:

$$q(t) = CV_B + e^{-\alpha t}(c_1 e^{j\omega' t} + c_2 e^{-j\omega' t}), \quad (4.14)$$

com  $j = \sqrt{-1}$  e

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (4.15)$$

Apenas no regime sub-crítico oscilações são observadas no sistema. Na equação 4.14 o termo  $CV_B$  corresponde ao valor da carga para um tempo muito grande e, portanto, podemos associá-lo à carga máxima que o capacitor pode acumular. As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas a partir das condições iniciais do problema, por exemplo,  $q(0) = 0$  e  $i(0) = 0$ . Para  $t \rightarrow \infty$ , podemos escrever  $q = CV_B$ . Tomando a parte real da equação 4.14 e substituindo as condições iniciais, a solução pode ser escrita como:

$$q(t) = CV_B[1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega' t)]. \quad (4.16)$$

Como a voltagem  $V_C$  no capacitor é proporcional à carga (equação 4.1), podemos escre-

ver também:

$$V_C(t) = V_B[1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega' t)]. \quad (4.17)$$

A equação 4.16 nos mostra que a carga no capacitor é composta de duas partes. Uma parte é oscilante, chamada de transiente, cuja frequência  $f' = \omega'/2\pi$  tem um valor próximo do valor da frequência de ressonância, modulada por uma função exponencial decrescente, que tende a zero. A outra parte é fixa, que é a carga que o capacitor terá após cessado o efeito do transiente.

Como no caso dos circuitos RC e RL, para observarmos as oscilações no regime sub-crítico devemos usar um gerador de sinais, que ao invés de gerar uma voltagem no circuito variando de  $V = 0$  a  $V = V_B$ , como assumimos em toda a discussão do problema, gera uma onda quadrada com amplitude variando de  $-V_0$  a  $+V_0$ . O efeito dessa mudança altera a condição inicial do problema. A nova condição inicial para a carga do capacitor quando o circuito é chaveado para a posição "B" passa a ser  $q(0) = -CV_0$  e não "zero", como assumimos na discussão anterior. Isto faz com que a solução descrita pelas equações 4.14 e 4.15 seja modificada para:

$$q(t) = CV_0[1 - 2e^{-\alpha t} \cos(\omega' t)] \quad (4.18)$$

e

$$V_C(t) = V_0[1 - 2e^{-\alpha t} \cos(\omega' t)]. \quad (4.19)$$

Na figura 4.2 mostramos uma imagem aproximada do que deve ser visto na tela do osciloscópio quando utilizamos uma onda quadrada alimentando um circuito RLC. Percebemos por essa figura que a voltagem oscilante corresponde aos máximos e mínimos das oscilações em torno da voltagem do gerador de sinais. Esta figura mostra um aspecto muito interessante, próprio de circuitos RLC operando em regime sub-crítico. À medida que o capacitor se descarrega, parte de sua energia é transferida para o indutor e parte é dissipada pelo resistor. Depois que o capacitor é completamente descarregado, o indutor descarrega a energia armazenada no ciclo anterior, carregando novamente o capacitor e dissipando parte dessa energia através do resistor. Dessa forma, temos uma transferência periódica de energia entre o capacitor e o indutor, que é amortecida pelo resistor. Durante um certo tempo a carga do capacitor mostra um comportamento oscilante que decai exponencialmente. Após esse tempo, o circuito sai do regime transitório e entra no regime permanente, com o capacitor carregado com o valor máximo de carga.

A determinação experimental de  $\alpha$  pode ser feita usando-se os mesmos métodos empregados para a determinação dos tempos de decaimento de circuitos RC e RL: quando  $t = 1/\alpha$ , a voltagem (em módulo) terá caído a 0,37 de seu valor inicial  $\Delta V$ . Por isso  $\alpha$  é chamado de constante de amortecimento.

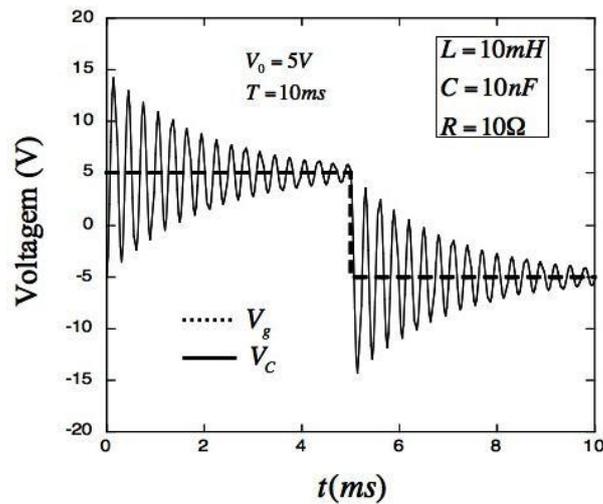


Figura 4.2: Figura aproximada que deve ser obtida na tela do osciloscópio para um circuito RLC operando em regime sub-crítico com os valores de R, L, C indicados na mesma.

A parcela da carga total que oscila no tempo, nos pontos de máximo ou mínimo da função “cosseno”, é dada em módulo por:

$$q_{\text{oscilante}}(t) = q_0 e^{-\alpha t}, \quad (4.20)$$

onde  $q_0 = 2CV_0$  e os instantes de tempo  $t_n$  são aqueles que fazem  $\cos(\omega' t_n) = \pm 1$ , ou seja:

$$t_n = n \frac{T'}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.21)$$

com

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'}. \quad (4.22)$$

Note que  $T'$  é o período das oscilações da voltagem no capacitor. Assim, para os instantes de tempo  $t_n$ , podemos escrever:

$$|V_C(t_n)| = \Delta V e^{-\alpha t_n}, \quad (4.23)$$

com  $\Delta V = 2V_0$ . A figura 4.3 mostra a representação dos instantes de tempo  $t_n$ .

Um outro parâmetro também é utilizado para caracterizar o comportamento do circuito

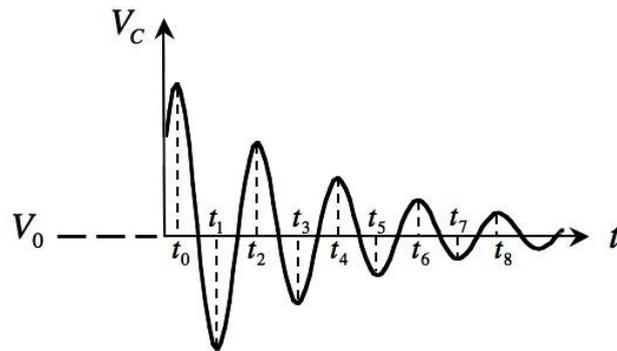


Figura 4.3: Representação esquemática de  $t_n$ .

RLC. Conhecido como fator  $Q$  ou fator de mérito. Este fator é definido como sendo:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Energia dissipada por ciclo}}. \quad (4.24)$$

Quanto maior o fator  $Q$ , menor a perda fracionária de energia por ciclo. Para o circuito RLC em série pode ser mostrado que:

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} \quad (4.25)$$

ou, escrevendo de outra forma,

$$Q_\alpha = \omega_0 \frac{1}{2\alpha} \quad (4.26)$$

e portanto  $\omega'$  também pode ser definido em função deste fator:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (4.27)$$

Se o fator de mérito  $Q > 1/2$  (regime sub-crítico) então o circuito oscila com a frequência natural de oscilação  $\omega'$ . Note que  $\omega'$  é sempre menor que a frequência  $\omega_0$ . As oscilações são amortecidas exponencialmente com a constante de tempo  $\tau \equiv 1/\alpha$ .

Se o fator de mérito  $Q < 1/2$  (regime super-crítico) então  $\omega'$  é imaginário, e não há

oscilações.

Se  $Q = 1/2$  temos o caso do amortecimento crítico e  $\omega'$  é nulo.

A figura 4.4 mostra as voltagens sobre o resistor, capacitor e indutor nos três regimes (sub-crítico, super-crítico e crítico). É interessante notar que no caso de amortecimento sub-crítico, o número de oscilações dentro de uma constante de tempo  $\tau$  é  $Q/\pi$ . Podemos então escrever que

$$Q_N = N \times \pi, \quad (4.28)$$

onde  $N$  é o número de oscilações contadas dentro do intervalo de tempo  $\tau$ . Este fato é muitas vezes utilizado para estimar rapidamente o  $Q$  do circuito.

No caso de amortecimento sub-crítico a voltagem no capacitor oscila, excedendo a voltagem da fonte. Para amortecimento crítico o capacitor se carrega em tempo mínimo sem exceder a voltagem de entrada em nenhum instante. A voltagem no indutor é sempre descontínua em  $t = 0$ . Esta é uma característica de todo circuito excitado por uma função degrau. Como a soma das voltagens sobre todos os elementos do circuito em série deve ser igual à voltagem da fonte, pelo menos uma das voltagens da soma deve ser descontínua.

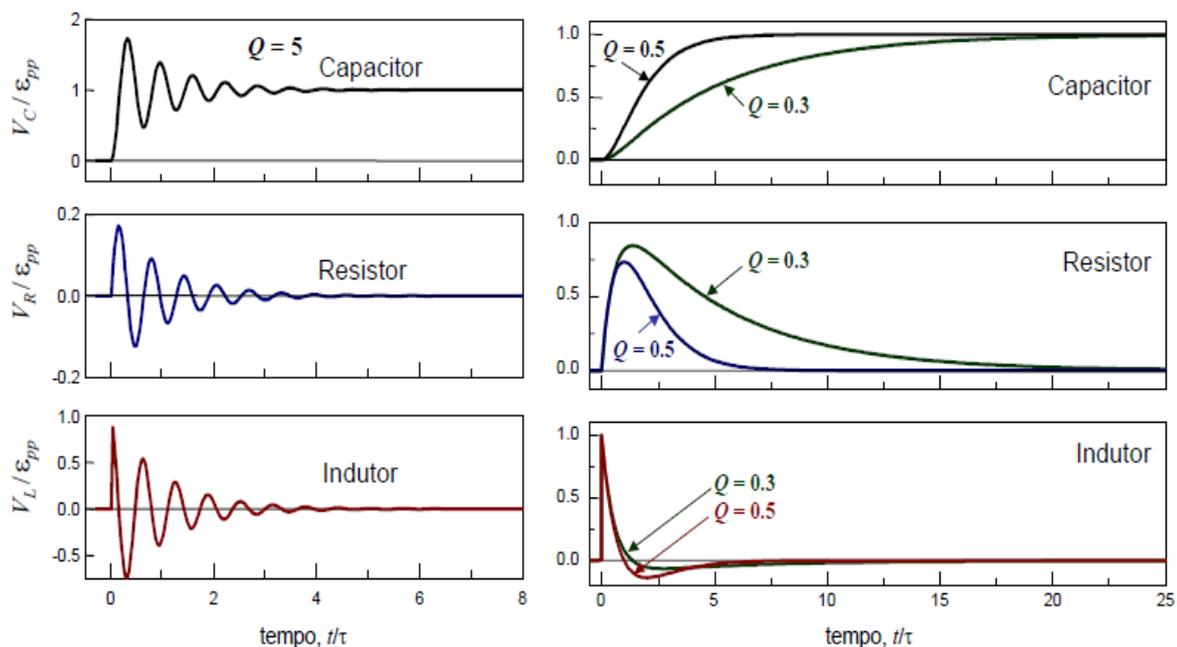


Figura 4.4: Transientes no circuito RLC em série para os casos de amortecimento sub-crítico (esquerda), amortecimento crítico (direita,  $Q = 0, 5$ ) e super-crítico (direita  $Q = 0, 3$ ).  $\epsilon_{pp}$  é a voltagem pico a pico da onda quadrada.

## 4.3 Procedimentos experimentais

### 4.3.1 Procedimento I: constante de tempo e frequência de oscilação do circuito RLC

1. Monte o circuito da figura 4.5 com um resistor de  $R = 100 \Omega$ , um capacitor de  $C = 10 \text{ nF}$  e um indutor de  $L = 23,2 \text{ mH}$ . Ajuste no gerador de funções uma onda quadrada com amplitude de  $V_0 = 4 \text{ V}$  e frequência aproximada  $f = 500 \text{ Hz}$ . Você deve ser capaz de visualizar na tela do osciloscópio o circuito operando no modo sub-crítico, com ao menos 5 ciclos de oscilações da voltagem no capacitor (semelhante à figura 4.2).

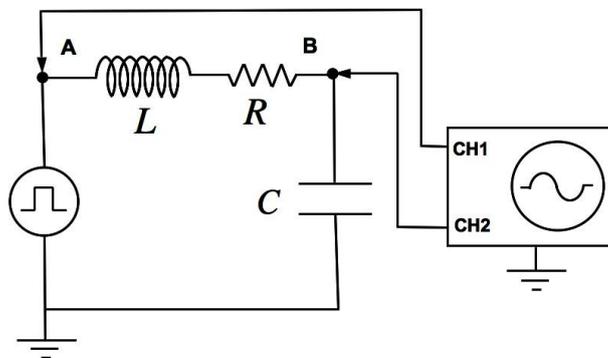


Figura 4.5: Circuito RLC a ser montado para o Procedimento I.

2. Ajuste as escalas de tempo e tensão do osciloscópio de modo a maximizar a imagem de meio período da onda quadrada na tela. Coloque o patamar superior da onda quadrada do canal 1 no meio da tela e aumente a sua duração de modo a obter apenas o primeiro semi-ciclo da onda quadrada.
3. Meça o período  $T'$  das oscilações da voltagem no capacitor. Compare com o valor nominal.
4. Preencha a tabela 1 com os valores de  $|V_C(t_n)|$  e  $t_n$ . Indique as escalas utilizadas. Meça os valores de  $R$  e  $C$  usando um multímetro e anote o valor nominal de  $L$  para a bobina utilizada.

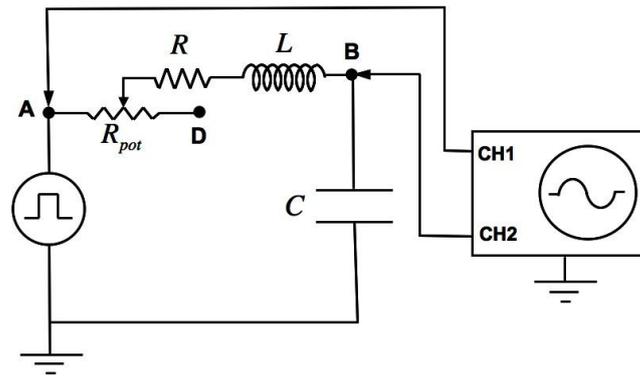


Figura 4.6: Circuito RLC com um potenciômetro a ser montado no Procedimento II.

Tabela 1

$t_n \pm \sigma_{t_n}$	$ V_C(t_n)  \pm \sigma_{ V_C(t_n) }$ (V)	$\ln( V_C(t_n)  / 1V)$	$\sigma_{\ln( V_C(t_n) )}$

5. Determine a partir das medidas tabeladas os valores dos parâmetros:

- $\alpha$  e  $\Delta V$  da equação 4.23;
- número de oscilações  $N$  dentro de um intervalo  $\tau = 1/\alpha$  e o fator de mérito  $Q$  (equações 4.24, 4.25 e 4.26).

### 4.3.2 Procedimento II: transição do regime sub-crítico para o regime super-crítico.

1. No circuito montado para o Procedimento I, substitua o resistor por um potenciômetro ( $R_{pot} = 5 \text{ k}\Omega$ ), como mostrado na figura 4.6. O potenciômetro é um elemento de circuito com resistência variável. Ele é muito utilizado em situações que se deseja variar a corrente e, por conseguinte, a potência fornecida a determinado circuito elétrico.
2. Varie a resistência do potenciômetro de modo a identificar o valor crítico de resistência para o qual o circuito passa do regime sub-crítico ao regime super-crítico. Meça  $R_{crítica}$  usando um multímetro.

3. Ajuste o potenciômetro de modo que ele tenha resistência nula. Descreva o que acontece com a voltagem no capacitor. O amortecimento persiste? Neste caso não deveria haver amortecimento e o circuito deveria ser um oscilador hamônico simples. Explique porque isto não ocorre.