Experiência 6 - Oscilações harmônicas amortecidas

1. OBJETIVO

O objetivo desta aula é discutir e realizar experimentos envolvendo um conjunto massa-mola no qual o efeito de amortecimento sobre o movimento do conjunto não pode ser desprezado. Esses experimentos são semelhantes aos realizados na **Aula 3**. A diferença está no fato de não podermos desconsiderar o efeito do atrito do ar com o bloco, que descreve assim, oscilações harmônicas amortecidas.

2. INTRODUÇÃO

Para a descrição do modelo usado nos experimentos vamos manter as mesmas definições usadas para a descrição do oscilador harmônico simples (**Aula 3**). Na FIG.1 apresentamos um esquema do aparato experimental que será utilizado.

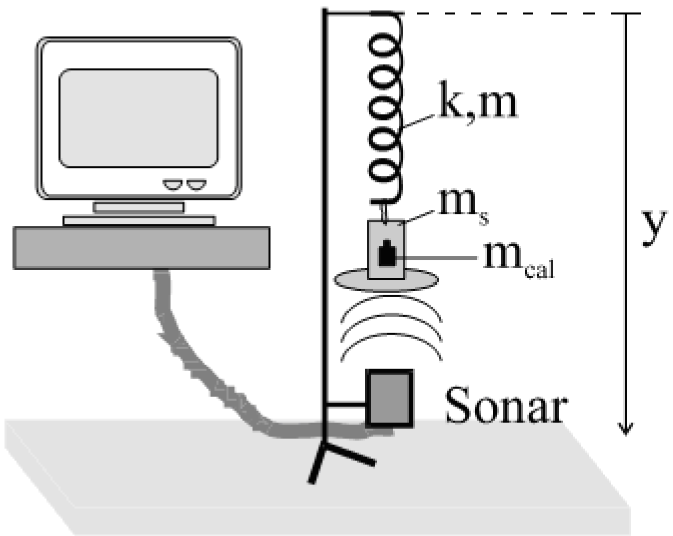

FIG. 1 - Esquema do aparato experimental a ser usado.

Novamente, a mola que utilizaremos é uma mola real e possui massa não nula. Para modelar nosso sistema, assumiremos uma mola ideal (sem massa) de constante elástica k, à qual está pendurada uma massa efetiva extra m_{ef}. Lembrando das definições feitas na **Aula 3**, chamaremos de m_s a massa do suporte que usaremos e m_{cal} a massa variável que será colocada no suporte.

Agora, ao colocarmos o sistema massa-mola para oscilar com pequenas amplitudes, teremos que considerar a ação da resistência do ar no movimento do conjunto. Esse efeito aparece como uma força sempre contrária ao movimento do objeto e proporcional à velocidade do mesmo. Assim podemos escrever a segunda lei de Newton para o caso em questão:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}, \tag{1}$$

onde $M = m_{ef} + m_s + m_{cal}$, e as forças são:

$$\vec{P} = Mg \quad \hat{y}, \tag{2}$$

$$\vec{F}_M = -k\left[y(t) - y_e(0) \right] \; \hat{y}, \tag{3}$$

$$\vec{F}_R = -\beta \vec{v}, \tag{4}$$

sendo β uma constante que depende da geometria do objeto, e:

$$\vec{v} = \frac{dy}{dt}\,\hat{y}, \tag{5}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 y}{dt^2}\,\hat{y}, \tag{6}$$

Assim:

$$M\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = Mg - k\left[y(t) - y_e(0) \right] - \beta\frac{dy}{dt},$$
$$M\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = Mg - k\left\{\left[y(t) - y_e(M) \right] + \left[y_e(M) - y_e(0) \right]\right\} - \beta\frac{dy}{dt}.$$

O primeiro termo do segundo membro da expressão acima é cancelado pelo terceiro e podemos escrever:

$$M\,\frac{d^2 y}{dt^2} = -k\left[y(t) - y_e(M) \right] - \beta\frac{dy}{dt}. \tag{7}$$

Definindo a amplitude de oscilação $\eta_a(t)$:

$$\eta_a(t) = y(t) - y_e(M), \tag{8}$$

temos:

$$\frac{d\eta_a}{dt} = \frac{dy}{dt}, \tag{9}$$

e:

$$\frac{d^2\eta_a}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}. \tag{10}$$

Podemos assim escrever:

$$\frac{d^2\eta_a}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\eta_a}{dt} + \omega_0^{\,2}\eta_a = 0, \tag{11}$$

com:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \tag{12}$$

e

$$\gamma = \frac{\beta}{2M} \tag{13}$$

η_a neste caso, como no caso de oscilações simples, descreve as flutuações em torno da posição de equilíbrio para uma determinada massa no suporte.

Para encontrarmos a solução para a equação diferencial descrita na Eq.(11) observemos que ela envolve funções cujas derivadas primeira e segunda são proporcionais a elas mesmas. As funções que satisfazem a essas condições são a função *exponencial* e as funções *seno* e *cosseno*. Como podemos representar as funções *seno* e *cosseno* por exponenciais complexas, vamos supor uma solução do tipo:

$$\eta_a(t) = Ae^{rt}, \tag{14}$$

de forma que:

$$\frac{d\eta_a}{dt} = r\eta_a, \tag{15}$$

e:

$$\frac{d^2\eta_a}{dt^2} = r^2\eta_a. \tag{16}$$

Assim, para que a equação diferencial descrita na Eq.(11) seja satisfeita devemos ter:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^{\ 2} = 0. \tag{17}$$

E temos para *r* os seguintes valores:

$$r_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2{}_0}. \tag{18}$$

Temos, com isso, três regimes diferentes de soluções:

a) Oscilador amortecido **super-crítico**: neste caso $\gamma > \omega_0$ e a solução corresponde à soma de duas exponenciais que decaem com o tempo.

b) Oscilador amortecido **crítico**: neste caso $\gamma = \omega_0$ e a solução corresponde à soma de uma exponencial que decai com tempo (*t*) com uma função linear em *t*.

c) Oscilador amortecido **sub-crítico**: neste caso $\gamma < \omega_0$, as raízes $r_{\pm}$ são complexas e a solução corresponde ao produto de uma função exponencial que decai com o tempo pela soma de funções *seno* e *cosseno,* também dependentes do tempo. Este é o caso que estudaremos nesta aula.

A solução do oscilador amortecido sub-crítico pode ser escrita como:

$$\eta_a(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi), \tag{19}$$

onde *A* e ϕ são constantes que dependem das condições iniciais do problema e:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \gamma^2}. \tag{20}$$

Tempos de decaimento

Para avaliarmos quão rápido um sistema com amortecimento tem sua energia dissipada definimos algumas constantes que estão relacionadas com os parâmetros envolvidos no sistema observado. Essas constantes nos dão uma idéia de quão rápido é o decaimento, por exemplo, da amplitude de oscilação no experimento que será realizado nesta aula. Vamos trabalhar com 3 conceitos de tempos de decaimento:

a) Tempo de meia vida

O tempo de meia vida $\tau_{1/2}$ corresponde ao intervalo de tempo decorrido de modo que a amplitude $A(t)$ caia à metade de seu valor inicial:

$$A(t+\tau_{1/2}) = \frac{1}{2}A(t). \tag{21}$$

b) Tempo de relaxação

O tempo de relaxação τ de uma função $A(t)$ que decai como função do tempo é definido por:

$$A(t+\tau) = \frac{1}{e}A(t), \tag{22}$$

onde $e \cong 2{,}718$ é o número irracional que é usado como base dos logaritmos *Neperianos*.

c) Tempo de vida média

O tempo de vida média $\overline{\tau}$ de uma função $A(t)$ que decai com o tempo é definido pela expressão:

$$\overline{\tau} = \frac{\int_0^\infty tA(t)dt}{\int_0^\infty A(t)dt}. \tag{23}$$

Para o caso de um decaimento exponencial com o tempo temos:

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma}, \quad \tau = \frac{1}{\gamma}, \quad \overline{\tau} = \frac{1}{\gamma}. \tag{24}$$

3 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

1 - Meça a massa m_k da mola que será usada e meça também a massa do recipiente m_s onde serão colocadas as massas calibradas. Note que nesta experiência, usaremos o recipiente acoplado ao disco de plástico, para aumentar o atrito com o ar.

2 - Pendure a mola no suporte em que está instalado o sonar e pendure na mola o recipiente contendo uma determinada peça com massa calibrada. Alinhe o sistema mola-recipiente com o sonar.

3 - Usando o sonar, meça a posição de equilíbrio estático do sistema $y_e(M)$.

4 - Coloque o sistema para oscilar. A amplitude das oscilações não precisa ser muito grande, basta que as oscilações possam ser monitoradas pelo sonar.

5 - Use o sonar para medir o período da oscilação. A incerteza na medida do período fica menor se, ao invés de medirmos uma única oscilação, medimos o tempo correspondente a várias oscilações e dividimos o valor obtido pelo número de oscilações. Portanto, faça a medida do período utilizando todos os ciclos que aparecerem na tela do programa de controle do sonar. Você pode também alterar a janela de tempo de medida do sonar para ter mais pontos experimentais. Veja no **Apêndice B** como isso pode ser feito.

6 - Ainda com o registro da posição do sistema em função do tempo, na tela do programa de controle do sonar, anote os valores das posições dos picos (ou mínimos) e seus respectivos instantes de tempo. Vamos chamar estas posições de $y(t_n)$, para cada instante de tempo t_n, onde $n = 0,1,2,3...$ é um rótulo que marca a ordem de aparecimento dos picos (ou mínimos). É importante lembrar que os picos estão separados por um intervalo de tempo igual a um período *T*. Vamos denominar o módulo dos valores da função $\eta_a(t)$ para seus pontos de máximo ou mínimo por $\eta_a(t_n)$. Nessa situação $\cos(\omega t_n + \phi) = \pm 1$ e podemos escrever $\eta_a(t_n) = Ae^{-\gamma t_n}$.